Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

15-лекция. Интегральные уравнения. Численные методы решения интегральных уравнений

Цель лекции – сформировать у студентов теоретические знания об основных типах интегральных уравнений и их свойствах, а также развить практические навыки применения методов вычислительная математика для построения и анализа численных решений интегральных уравнений, включая методы квадратур, коллокаций, Галёркина и итерационные методы, с оценкой их сходимости, устойчивости и точности.

План лекции:

1 Основные виды линейных интегральных уравнений

Под интегральным уравнением понимается уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком определенного интеграла [1–15]. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением линейных интегральных уравнений, в которые неизвестная функция входит лишь в первой степени (линейно). Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся типы интегральных уравнений. Уравнение вида

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \tag{1.1}$$

где $K(x,s)$ (ядро) и $f(x)$ — известные функции, называется *интегральным уравнением Фредгольма первого рода*. Уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \tag{1.2}$$

где λ — числовой параметр, носит название *интегрального уравнения Фредгольма второго рода*. Параметр λ вводится по следующим соображениям: при данном значении λ интегральное уравнение (1.2) не всегда имеет решения. Варируя параметр λ, можно добиться того, чтобы решение уравнения (1.2) существовало. Параметр λ можно также ввести в левую часть уравнения Фредгольма первого рода (1.1). В приложениях встречаются также интегральные уравнения вида

$$\int\limits_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \tag{1.3}$$

и

$$y(x) - \lambda \int\limits_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds = f(x), \tag{1.4}$$

которые носят названия *интегральных уравнений Вольтерра соответственно первого и второго рода.*

2 Решение интегрального уравнения методом конечных сумм

Метод основывается на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i) + R(F), \tag{2.1}$$

где x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — абсциссы точек отрезка $[a, b]$, A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$, и $R[F]$ — остаточный член (ошибка) формулы (2.1). Обычно $A_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n A_i = b - a$. Например, в случае равноотстоящих точек $x_i = a + (i-1)h$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $h = (b-a)/(n-1)$, будем иметь (см. [18]):

1) для формулы прямоугольников:

$$A_i = h \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad A_n = 0;$$

2) для формулы трапеций:

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = h.$$

3) Для общей формулы Симпсона при $n = 2m + 1$:

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3},$$
$$A_2 = A_4 = \cdots = A_{2m} = \frac{4h}{3},$$
$$A_3 = A_5 = \cdots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

Другие квадратурные формулы см. в [16,18,19]. Пусть теперь дано интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds = f(x), \quad (a \le x \le b). \tag{2.2}$$

Выбирая точки $x_i \in [a, b]$ и вводя обозначения:

$$y(x_i) = y_i, \quad K(x_i, x_j) = K_{ij}, \quad f(x_i) = f_i, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

на основании формулы (2.1) будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i + R_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3}$$

где R_i — соответствующие ошибки. Отбрасывая в системе (2.3) величины R_i, для приближённых значений Y_i решения $y(x)$ в узлах x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получим линейную алгебраическую систему

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Вводя символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \ne j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и учитывая, что

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} Y_j,$$

систему (2.4) можем записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) Y_j = f_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Если

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) \ne 0, \tag{2.6}$$

то система (2.5) имеет единственное решение Y_i, которое можно найти методом Гаусса или другими методами, разработанными для решения систем алгебраических линейных уравнений (см., например, [18]).

Найдя Y_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, для решения $y(x)$ получаем из уравнения (2.2) приближенное аналитическое выражение

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i K(x, x_i) Y_i. \tag{2.7}$$

Различные между собой корни $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_m$ $(m \le n)$ алгебраического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ представляют собой, вообще говоря, приближения собственных значений ядра $K(x, s)$. Если $\tilde{Y}_{ik}$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, m;\ l = 1, \dots, p_k)$ — соответствующие ненулевые решения однородной системы

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij} - \tilde{\lambda}_k A_j K_{ij}) \tilde{Y}_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2.8}$$

то собственные функции ядра приближенно определяются формулами

$$\tilde{\varphi}_{kl}(x) = \tilde{\lambda}_k \sum_{i=1}^{n} A_j K(x, x_i) \tilde{Y}_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, m;\ l = 1, \dots, p_k).$$

Оценка погрешности метода конечных сумм приведена в [16] и [19]. Заметим, что этот метод дает хорошие результаты, если ядро $K(x, s)$ и правая часть $f(x)$ достаточно гладкие функции. В противном случае полезно предварительно преобразовать соответствующим образом интегральное уравнение (см. [19]). Метод конечных сумм может быть применен также к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(x, s) y(s)\, ds = f(x).$$

В этом случае приближенные значения Y_i решения $y(x)$ $(a \le x \le b)$ в узлах x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ будут определяться из системы

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2.9}$$

Особенно просто применение метода конечных сумм для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s) y(s)\, ds = f(x) \quad (a \le x \le b),$$

которое можно рассматривать как уравнение Фредгольма второго рода (раздел 1). Здесь $K_{ij} = 0$ при $j > i$, и, следовательно, соответствующая система (2.4) имеет вид

$$Y_i - \lambda \sum_{i=1}^{t} A_i K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{2.10}$$

Получилась линейная система с треугольной матрицей. Если

$$1 - \lambda A_i K_{ii} \ne 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{2.11}$$

то из системы (2.10) последовательно находим:

$$Y_1 = f_1 (1 - \lambda A_1 K_{11})^{-1},$$

$$Y_2 = (f_2 + \lambda A_1 K_{21} Y_1)(1 - \lambda A_2 K_{22})^{-1},$$
$$\vdots$$
$$Y_n = \left(f_n + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} A_i K_{ij} Y_j \right) (1 - \lambda A_n K_{nn})^{-1}.$$

Условие (2.11) при данном λ заведомо выполнено, если коэффициенты A_i достаточно малы, чего всегда можно добиться.

Пример. Методом конечных сумм найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^1 x e^{xs} y(s)\, ds = e^x. \tag{2.12}$$

Выберем узлы $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$. Значения ядра $K(x,s) = xe^{xs}$ и правой части $f(x) = e^x$ в соответствующих точках приведены в следующих таблицах.

Таблица 1: Таблица значений K_{ij}

$x \backslash s$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	0,6420	1,6487
1	0	1,3592	2,7183

Таблица 2: Таблица значений f_i

x_i	0	1/2	1
f_i	1	1,6487	2,7183

Используя квадратурную формулу Симпсона (см. [18])

$$\int_0^1 F(x)\, dx \approx \frac{1}{6} \left[F(0) + 4F\left(\frac{1}{2}\right) + F(1) \right],$$

для определения приближенных значений Y_i $(i = 1, 2, 3)$ решения $y(x)$ в узлах x_i получаем систему

$$\begin{cases} Y_1 = 1, \\ Y_2 + \frac{1}{6}(0,5000 Y_1 + 2,5680 Y_2 + 1,3592 Y_3) = 1,6487, \\ Y_3 + \frac{1}{6}(Y_1 + 6,5948 Y_2 + 2,7183 Y_3) = 2,7183, \end{cases}$$

или, после упрощений,

$$\begin{cases} Y_1 = 1, \\ 1,4280 Y_2 + 0,2265 Y_3 = 1,5654, \\ 1,0991 Y_2 + 1,4531 Y_3 = 2,5516. \end{cases} \tag{2.13}$$

Решая систему (2.13), находим: $Y_1 = 1$; $Y_2 = 0,930$; $Y_3 = 1,053$. Приближенное решение можно выразить формулой

$$Y(x) = e^x - \frac{x}{6}(1 + 3,720e^{\frac{x}{2}} + 1,053e^x).$$

Заметим, что точное решение уравнения (2.12) есть $y(x) = 1$, как легко проверить непосредственно.

3 Метод вырожденных ядер

Определение. Ядро $K(x, s)$ называется **вырожденным**, если оно может быть представлено в виде конечной суммы парных произведений:

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s), \tag{3.1}$$

где функции $\alpha_i(x)$, так же как и функции $\beta_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, можно считать линейно независимыми. Для таких ядер интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)\, ds \tag{3.2}$$

решается весьма просто. Действительно, подставляя выражение (3.1) в уравнение (3.2), будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i(x), \tag{3.3}$$

где

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s)y(s)\, ds \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.4}$$

— некоторые постоянные коэффициенты. Если в выражение (3.4) подставить формулу (3.3), то для определения коэффициентов c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получим алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s)f(s)\, ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} c_j\alpha_j(s)\, ds \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\gamma_{ij} = f_i,$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s)f(s)\, ds, \qquad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s)\beta_j(s)\, ds. \tag{3.5}$$

Систему (3.5) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ij})c_j = f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через $\Delta(\lambda)$ определитель системы (3.6):

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ij}) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda\gamma_{11} & -\lambda\gamma_{21} & \cdots & -\lambda\gamma_{n1} \\ -\lambda\gamma_{12} & 1-\lambda\gamma_{22} & \cdots & -\lambda\gamma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\gamma_{1n} & -\lambda\gamma_{2n} & \cdots & 1-\lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

и через $\Delta_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов $\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ij}$ определителя $\Delta(\lambda)$.

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то на основании правила Крамера [18] находим

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, в силу (3.3) интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} f_j \alpha_i(x). \tag{3.7}$$

Отсюда, подставляя вместо f_j соответствующее выражение (3.5) и заменяя сумму интегралов интегралом суммы, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} f(s)\, ds, \tag{3.8}$$

где

$$\Delta(x, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i(x) \beta_j(s) \Delta_{ij}(\lambda).$$

Из формулы (3.8) вытекает, что функция

$$R(x, s, \lambda) = \frac{\Delta(x, s, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i(x) \beta_j(s) \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{3.9}$$

есть резольвента интегрального уравнения (3.2). Собственные значения ядра $K(x, s)$ определяются из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \tag{3.10}$$

Если λ_k $(k = 1, 2, \ldots, m;\ m \leq n)$ есть корень уравнения (3.10) (очевидно, $\lambda_k \neq 0$), то соответствующие собственные функции $\varphi_k(x)$ ядра $K(x, s)$, т. е. нетривиальные решения однородного уравнения

$$\tilde{y}(x) = \lambda_k \int_a^b K(x, s) \tilde{y}(s)\, ds,$$

будут иметь вид

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} \alpha_i(x),$$

где $c_i^{(k)}$ — ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}-\lambda_k\gamma_{ij})c_i^{(k)}=0 \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Если $\lambda=\lambda_k$ есть собственное значение ядра $K(x,s)$, то неоднородное уравнение (3.2) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений.

Пример 1. Решить уравнение

$$y(x)=x^2+\lambda\int_0^1(x+s)y(s)\,ds. \tag{3.11}$$

Ядро $K(x,s)=x+s$ здесь, очевидно, вырожденное. Из уравнения (3.11) получаем

$$y(x)=x^2+\lambda(c_1x+c_2), \tag{3.12}$$

где

$$c_1=\int_{-1}^1 y(s)\,ds, \quad c_2=\int_{-1}^1 sy(s)\,ds. \tag{3.13}$$

Подставляя выражение (3.12) в формулы (3.13), будем иметь систему

$$c_1=\frac{2}{3}+2c_2\lambda, \quad c_2=\frac{2}{3}\lambda c_1; \tag{3.14}$$

отсюда

$$c_1=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{3}\lambda^2}, \quad c_2=\frac{\frac{4}{9}\lambda}{1-\frac{4}{3}\lambda^2}.$$

Следовательно, из формулы (12), если $\lambda^2\neq\frac{3}{4}$, получаем решение

$$y(x)=x^2+\frac{2\lambda x+\frac{4}{3}\lambda^2}{3-4\lambda^2}. \tag{3.15}$$

При $\lambda^2=\frac{3}{4}$ уравнение (3.11) решений не имеет.

Пример 2. Найти собственные значения, собственные функции и резольвенту ядра $K(x,s)=x+s$ в области $-1\le x\le 1$, $-1\le s\le 1$. На основании однородного уравнения

$$y(x)=\lambda\int_{-1}^1(x+s)y(s)\,ds$$

имеем

$$y(x)=\lambda(\tilde{c}_1x+\tilde{c}_2), \tag{3.16}$$

где коэффициенты $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ определяются из системы (ср. (3.14))

$$\tilde{c}_1-2\lambda\tilde{c}_2=0, \quad -\frac{2}{3}\lambda\tilde{c}_1+\tilde{c}_2=0. \tag{3.17}$$

Приравнивая нулю определитель системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -2\lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.18}$$

получим уравнение

$$1 - \frac{4}{3}\lambda^2 = 0,$$

из которого находим собственные значения: $\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Так как ядро $K(x,s)$ симметрическое:

$$K(x,s) = K(s,x),$$

то собственные значения λ_1 и λ_2 действительны. Из системы (3.17) имеем

$$\tilde{c}_1^{(k)} - 2\lambda_k \tilde{c}_2^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2),$$

откуда

$$\frac{\tilde{c}_1^{(k)}}{2\lambda_k} = \frac{\tilde{c}_2^{(k)}}{1} = \tilde{c}^{(k)}.$$

Следовательно, на основании (3.16) собственные функции суть

$$\varphi_1(x) = u_1(\sqrt{3}x + 1), \quad \varphi_2(x) = u_2(-\sqrt{3}x + 1),$$

где $u_k = \lambda_k \tilde{c}^{(k)} \neq 0 \quad (k = 1, 2)$. Собственные функции обычно нормируют, полагая

$$\int_{-1}^{b} \varphi_k^2(x)\, dx = 1 \quad (k = 1, 2).$$

В нашем случае имеем

$$u_k^2 \int_{-1}^{1} (\pm x\sqrt{3} + 1)^2\, dx = u_k^2 \cdot 4 = 1.$$

Отсюда можно принять $u_k = 1/2 \quad (k = 1, 2)$, и, следовательно, нормированные собственные функции суть

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \frac{1}{2}(1 + x\sqrt{3}), \quad \tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2}(1 - x\sqrt{3}).$$

Из определителя (3.18) получаем соответствующие алгебраические дополнения:

$$\Delta_{11}(\lambda) = 1, \quad \Delta_{12}(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda, \quad \Delta_{21}(\lambda) = 2\lambda, \quad \Delta_{22}(\lambda) = 1,$$

причем

$$\Delta(\lambda) = 1 - \frac{4}{3}\lambda^2.$$

Поэтому, учитывая, что

$$K(x,s) = \alpha_1(x)\beta_1(s) + \alpha_2(x)\beta_2(s),$$

где $\alpha_1(x) = x,\ \beta_1(s) = 1,\ \alpha_2(x) = 1,\ \beta_2(s) = s$, на основании формулы (3.9) находим резольвенту ядра:

$$R(x, s, \lambda) = \frac{1}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}\left(x + 2\lambda xs + \frac{2}{3}\lambda + s\right) = \frac{\frac{2}{3}\lambda + (x + s) + 2\lambda xs}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2}.$$

Решение любого неоднородного уравнения

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{1} (x + s)y(s)\, ds$$

при $\lambda^2 \neq \frac{3}{4}$ выражается формулой

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2}{3}\lambda + (x + s) + 2\lambda xs}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2} f(s)\, ds.$$

4 Метод наименьших квадратов

Для уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)\, ds - f(x) = 0, \tag{4.1}$$

полагаем

$$Y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x), \tag{4.2}$$

где $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ — известные функции и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — неопределенные коэффициенты, причем $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы. Подставляя (4.2) в левую часть уравнения (4.1), получим невязку

$$R[Y_n] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x, \lambda), \tag{4.3}$$

где $\psi_0(x, \lambda)$ и $\psi_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются формулами

$$\varphi_0(x, \lambda) = \varphi_0(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi_0(s)\, ds,$$

$$\psi_i(x, \lambda) = \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi_i(s)\, ds \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Согласно методу наименьших квадратов [16], [19], [24] коэффициенты c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ отыскиваются из условия минимума интеграла

$$I = \int_a^b \{R[Y_n]\}^2\, dx = \int_a^b \left[\psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x, \lambda)\right]^2 dx. \tag{4.4}$$

Это требование приводит к алгебраической системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \tag{4.5}$$

отсюда на основании (4.4), дифференцируя по параметрам $c_1, c_2, \ldots, c_n$ под знаком интеграла, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_a^b \psi_j(x,\lambda)\left[\psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x,\lambda)\right] dx = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.6}$$

С помощью сокращенных обозначений

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_a^b \psi_i(x,\lambda)\psi_j(x,\lambda)\, dx \tag{4.7}$$

систему (4.6) можно записать в виде нормальной системы способа наименьших квадратов

$$\begin{gathered} c_1(\psi_1,\psi_1) + c_2(\psi_1,\psi_2) + \cdots + c_n(\psi_1,\psi_n) = -(\psi_1,\psi_0), \\ c_1(\psi_2,\psi_1) + c_2(\psi_2,\psi_2) + \cdots + c_n(\psi_2,\psi_n) = -(\psi_2,\psi_0), \\ \vdots \\ c_1(\psi_n,\psi_1) + c_2(\psi_n,\psi_2) + \cdots + c_n(\psi_n,\psi_n) = -(\psi_n,\psi_0). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Заметим, что если $\varphi_0(x) \equiv 0$, то $\psi_0(x) = -f(x)$, и, следовательно, $-(\psi_i,\psi_0) = (\psi_i, f)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $(\psi_i,\psi_j) = (\psi_j,\psi_i)$, то матрица системы (4.8) симметрическая. Вместо интегрального метода наименьших квадратов можно воспользоваться точечным способом наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов применяется также для приближенного нахождения собственных значений и собственных функций ядра $K(x,s)$, аналогично тому как это делается для метода коллокации. А именно, полагая $f(x) \equiv 0$ и $\varphi_0(x) \equiv 0$, откуда $\psi_0(x) \equiv 0$, определяем приближенные значения собственных чисел из алгебраического уравнения

$$\det[(\psi_i,\psi_j)] = 0. \tag{4.9}$$

После этого приближенные собственные функции находятся из однородной системы (4.8), где вместо λ подставлено соответствующее приближенное значение.

Пример. Методом наименьших квадратов найти приближенное решение уравнения

$$y(x) = x^2 + \int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x+s)y(s)\, ds. \tag{4.10}$$

Для первого приближения полагаем $Y = c_1 + c_2x + x^2$. Отсюда

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_0(x) = x^2.$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sh}(x+s)\, ds = a \operatorname{sh} x, \quad \int_{-1}^{1} s \operatorname{sh}(x+s)\, ds = b \operatorname{ch} x, \quad \int_{-1}^{1} s^2 \operatorname{sh}(x+s)\, ds = c \operatorname{sh} x,$$

где $a = 2\operatorname{sh} 1 = 2,3504$; $\quad b = 2e^{-1} = 0,7358$; $\quad c = 6\operatorname{sh} 1 - 4\operatorname{ch} 1 = 0,8788$, и $\psi_1 = 1 - a\operatorname{sh} x$, $\psi_2 = x - b\operatorname{ch} x$, $\psi_0 = -c\operatorname{sh} x$. Далее находим:

$$(\psi_1, \psi_1) = 2 + a^2\left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1\right) = 6,4935,$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \frac{2}{3} + b^2\left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} + 1\right) = 2,1896,$$

$$(\psi_1, \psi_2) = -4\left(ae^{-1} + b\operatorname{sh} 1\right) = -8e^{-1}\operatorname{sh} 1 = -3,4586,$$

$$(\psi_1, \psi_0) = ac\left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1\right) = 1,6800,$$

$$(\psi_2, \psi_0) = -2ce^{-1} = -0,6466.$$

Получаем систему для определения коэффициентов c_1 и c_2:

$$6,4935c_1 - 3,4586c_2 = -1,6800; \quad -3,4586c_1 + 2,1896c_2 = 0,6466.$$

Отсюда получаем:

$$c_1 = -0,5423; \quad c_2 = -0,5613.$$

Таким образом,

$$Y = x^2 - 0,5613x - 0,5423. \tag{4.11}$$

Так как для уравнения (4.10) ядро

$$K(x, s) = \operatorname{sh}(x + s) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} s + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} s$$

вырожденное, то легко получить точное решение

$$y(x) = x^2 + \alpha\operatorname{sh} x + \beta\operatorname{ch} x, \tag{4.12}$$

где

$$\alpha = \frac{6\operatorname{sh} 1 - 4\operatorname{ch} 1}{2 - \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2}\right)^2} = -0,6821, \quad \beta = \alpha\left(\frac{\operatorname{sh} 2}{2} - 1\right) = -0,5548.$$

Из сравнения формул (4.11) и (4.12) заключаем, что приближенное решение Y близко к точному y, если $|x|$ — малая величина. На концах $x = \pm 1$ расхождения $|y - Y|$ довольно значительно.

5 Метод моментов

Пусть

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)\,ds - f(x) = 0. \tag{5.1}$$

Аналогично предыдущему (раздел 4), будем искать приближенное решение уравнения (5.1) в виде конечной суммы

$$Y_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.2}$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые известные линейно независимые функции (координатные функции) и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — неопределенные коэффициенты. Подставляя выражение (5.2) в левую часть уравнения (5.1), получим невязку

$$R[Y_n] = \sum_{j=1}^{n} c_j \left[\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)\,ds \right] - \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)\,ds. \tag{5.3}$$

Согласно методу моментов [16], [19], [24] коэффициенты c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из условия ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$. Это дает систему уравнений

$$\int_a^b R[Y_n]\varphi_i(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

или, в силу (5.3),

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}) = \lambda\gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.4}$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \qquad \beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)\,ds,$$

$$\gamma_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\varphi_i(x) f(s)\,ds.$$

Если определитель системы (5.4) $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})$ отличен от нуля, то из этой системы можно однозначно определить коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда формула (5.2) даст приближенное решение интегрального уравнения (5.1). Из уравнения $D(\lambda) = 0$ приближенно находятся собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ядра $K(x,s)$. Найдя ненулевые решения однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_{ij} - \lambda_k\beta_{ij}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

легко построить (раздел 3) приближенные собственные функции $\tilde{\varphi}^{(k)}(x)$, отвечающие данному собственному значению λ_k. Заметим, что метод моментов по идее совпадает с методом Галеркина (раздел 4). Можно показать [16], [19], что метод моментов равносилен замене ядра $K(x,s)$ некоторым вырожденным ядром $K^{(n)}(x,s)$. Поэтому для приближенного решения $Y_n(x)$ имеется оценка погрешности (см. [16], [19]), аналогичная приведенной выше (раздел 3).

Пример. Найти первые два собственных значения интегрального уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) y(s)\,ds = 0,$$

где

$$K(x,s) = \begin{cases} s, & \text{если } s \le x, \\ x, & \text{если } s > x. \end{cases} \tag{5.5}$$

На основании (5.5) имеем

$$R[y] = y(x) - \lambda \left\{ \int_0^x sy(s)\,ds + \int_x^1 xy(s)\,ds \right\}.$$

Положим $Y = c_1x + c_2x^2$. Тогда

$$\begin{aligned} R[Y] &= c_1x + c_2x^2 - \lambda \left[\frac{c_1x^3}{3} + \frac{c_2x^4}{4} + x\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3}\right) - \left(\frac{c_1x^3}{2} + \frac{c_2x^4}{3}\right)\right] \\ &= c_1\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x + \frac{\lambda}{6}x^3\right] + c_2\left[-\frac{\lambda}{3}x + x^2 + \frac{\lambda}{12}x^4\right]. \end{aligned}$$

Ортогонализируя невязку $R[Y]$, будем иметь систему

$$\int_0^1 R[Y]x\,dx = 0, \qquad \int_0^1 R[Y]x^2\,dx = 0$$

или

$$\begin{aligned} c_1\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{6}\cdot\frac{1}{5}\right] + c_2\left[-\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{12}\cdot\frac{1}{6}\right] = 0, \\ c_1\left[\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{6}\cdot\frac{1}{6}\right] + c_2\left[-\frac{\lambda}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{\lambda}{12}\cdot\frac{1}{7}\right] = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получим систему

$$\begin{aligned} c_1(120 - 48\lambda) + c_2(90 - 35\lambda) = 0, \\ c_1(630 - 245\lambda) + c_2(504 - 180\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Приравнивая нулю определитель системы (5.6), получим уравнение для определения собственных значений:

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 120 - 48\lambda & 90 - 35\lambda \\ 630 - 245\lambda & 504 - 180\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда $65\lambda^2 - 1692\lambda + 3780 = 0$, или

$$\lambda^2 - 26,03\lambda + 58,15 = 0. \tag{5.7}$$

Из уравнения (5.7) будем иметь

$$\tilde{\lambda}_1 = 2,462; \qquad \tilde{\lambda}_2 = 23,568.$$

Для сравнения укажем точные собственные значения:

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,467 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,206,$$

полученные из решения соответствующей краевой задачи:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Таким образом, погрешность $\tilde{\lambda}_1$ равна примерно 0,2%, а $\tilde{\lambda}_2$ — 6%. В заключение заметим, что рассмотренные методы минимизации невязки (разделы 4, 5) применимы также к решению нелинейных интегральных уравнений. Имеются также другие методы решения интегральных уравнений, например метод Монте-Карло [25].

6 Контрольные вопросы

1. Дайте классификацию основных видов линейных интегральных уравнений (Фредгольма и Вольтерра). В чём их различие?

2. Запишите общий вид линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

3. Какие условия обеспечивают существование и единственность решения интегрального уравнения?

4. В чём заключается идея метода конечных сумм?

5. Что такое вырожденное ядро и как оно используется в теории интегральных уравнений?

6. В чём состоит метод наименьших квадратов для интегральных уравнений?

7. Как формируется функционал ошибки в методе наименьших квадратов?

8. Что представляет собой метод моментов?

9. Как выбираются базисные (пробные) функции в методе моментов?

10. Сравните метод вырожденных ядер и метод конечных сумм.

11. Решить уравнение
$$x(t) - \lambda \int_0^1 (t+s)\, x(s)\, ds = t$$
методом вырожденных ядер.

12. Применить метод конечных сумм к уравнению
$$x(t) - \int_0^1 ts\, x(s)\, ds = 1.$$

13. Аппроксимировать решение уравнения Фредгольма второго рода с ядром

$$K(t,s) = e^{ts}$$

с помощью метода конечных сумм (разбить отрезок на n частей).

14. Представить ядро

$$K(t,s) = t + s$$

в виде вырожденного ядра и решить соответствующее уравнение.

15. Построить функционал метода наименьших квадратов для уравнения

$$x(t) - \int_0^1 ts\,x(s)\,ds = t^2.$$

16. Вывести систему нормальных уравнений для задачи из предыдущего пункта.

17. Решить методом моментов уравнение

$$x(t) - \int_0^1 ts^2 x(s)\,ds = 1,$$

используя базис $\{1, t\}$.

7 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–25].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виарда Г., Интегральные уравнения, ГТТИ, 1933.

[2] Гурса Э., Курс математического анализа, т. I, II, ч. 2, ГТТИ, 1934, гл. XXX–XXXIII.

[3] Гюнтер Н. М., Основы математической физики, ч. 1, Интегральные уравнения, Кубуц, 1931.

[4] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951, гл. III.

[5] Ловиг Т. В., Линейные интегральные уравнения, ГТТИ, 1933.

[6] Михлин С. Г., Интегральные уравнения, изд. 2, Гостехиздат, 1949.

[7] Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы математической физики, т. I, ИЛ, 1958, гл. 8.

[8] Мускелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд. 2, Физматгиз, 1962.

[9] Монц Г. М., Интегральные уравнения, т. I, ГТТИ, 1934.

[10] Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951.

[11] Привалов И. И., Интегральные уравнения, ОНТИ, 1935.

[12] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, Гостехиздат, 1941, гл. II.

[13] Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, ОНТИ, 1936.

[14] Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.

[15] Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ГТТИ, 1933, ч. I, гл. 11.

[16] Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 4, Физматгиз, 1962.

[17] Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, изд. 2, «Наука», 1966, гл. IX.

[18] Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики, изд. 3, «Наука», 1966, гл. VIII, XIV, XVI.

[19] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I, т. II, Физматгиз, 1961.

[20] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Гостехиздат, 1948–1949, т. II, гл. II, т. III, гл. XIX.

[21] Уиттекер Э., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933, гл. X, XV.

[22] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.

[23] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958, гл. V.

[24] Положий Г. Н., др., Математический практикум, Физматгиз, 1960, гл. 7.

[25] Бут Э. Д., Численные методы, Физматгиз, 1959, гл. XII.